成城大学　2025 年度　学部別選抜（A方式）
２月４日：数学

[**1**]　(**1**) $P(1) = 1 + (a-1) + (2-a) - 2 = 0$

(**2**) (1) より，$P(x)$ は $x-1$ を因数としてもつ。割り算を実行すれば，

$$P(x) = (x-1)(x^2+ax+2)$$

よって，$P(x) = 0$ の実数解の 1 つは $x = 1$ である。2 次方程式 $x^2+ax+2 = 0$ の判別式は，$D = a^2-8$ であることから，次のように場合分けする。

(i) $a < -2\sqrt{2}$，$a > 2\sqrt{2}$ のとき。2 次方程式 $x^2+ax+2 = 0$ は異なる 2 つの実数解

$$\frac{-a-\sqrt{a^2-8}}{2}, \quad \frac{-a+\sqrt{a^2-8}}{2}$$

をもつ。

2 つの解の 1 つが $x = 1$ であるとすると，$x = 1$ を $x^2+ax+2 = 0$ に代入して，$a = -3$ が得られる。このとき，$P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2 となる。そして，これ以外の場合には，$P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 3 となる。

(ii) $a = \pm 2\sqrt{2}$ のとき。2 次方程式 $x^2+ax+2 = 0$ は重解 $x = \mp\sqrt{2}$ をもつ。いずれにしても $x = 1$ とは一致しないから，この場合 $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2 である。

(iii) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ のとき。2 次方程式 $x^2+ax+2 = 0$ は実数解をもたない。よって，$P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 1 である。

以上をまとめると，

- $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ のとき，$P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 1
- $a = \pm 2\sqrt{2}$，$a = -3$ のとき，$P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2
- $a < -3$，$-3 < a < -2\sqrt{2}$，$a > 2\sqrt{2}$ のとき，$P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 3

となる。

[**2**]　(**1**) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ の両辺を 2 乗すると，$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{7}{16}$ となる。左辺を展開すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$$

に等しいから，$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{16}$。よって，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}$

(**2**) まず，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta$ に注意する。ここで，与えられた条件 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ と (1) から，

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{7}{16}+4\times\frac{9}{32}=\frac{25}{16}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

(**3**) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから，(1) の結果を代入して，$\sin 2\theta=\dfrac{9}{16}$

【別解】条件 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ と (2) より，

$$\sin\theta=\frac{5+\sqrt{7}}{8},\quad \cos\theta=\frac{5-\sqrt{7}}{8}$$

さらに，2 倍角の公式より，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{16}$ が得られる。

(**4**) 2 倍角の公式を用いると，条件 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ と (2) より，

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

【別解】(3) の別解を用いれば，

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{5+\sqrt{7}}{8}\right)^2=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{5-\sqrt{7}}{8}\right)^2-1=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

とも計算できる。

[**3**] はじめに，与えられた漸化式に番号をつけて

$$a_{n+1} = -a_n + 4b_n \tag{1}$$

$$b_{n+1} = a_n + 2b_n \tag{2}$$

とする。(2) から，

$$a_n = b_{n+1} - 2b_n \tag{3}$$

さらに $a_{n+1} = b_{n+2} - 2b_{n+1}$ が得られる。これらを (1) に代入すると，

$$\begin{aligned} & b_{n+2} - 2b_{n+1} = -b_{n+1} + 2b_n + 4b_n \\ \Rightarrow \quad & b_{n+2} - b_{n+1} - 6b_n = 0 \end{aligned}$$

この式は，次のように 2 通りに変形できる：

$$\begin{aligned} b_{n+2} - 3b_{n+1} &= -2(b_{n+1} - 3b_n), \\ b_{n+2} + 2b_{n+1} &= 3(b_{n+1} + 2b_n) \end{aligned}$$

また，(2) より，$b_2 = a_1 + 2b_1 = 5$ であるから，$b_2 - 3b_1 = -1$，$b_2 + 2b_1 = 9$。よって，

- 数列 $\{b_{n+1} - 3b_n\}$ は，初項 -1，公比 -2 の等比数列
- 数列 $\{b_{n+1} + 2b_n\}$ は，初項 9，公比 3 の等比数列

である。ゆえに，

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 3b_n &= (-1) \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} \\ b_{n+1} + 2b_n &= 9 \cdot 3^{n-1} = 3^{n+1} \end{aligned}$$

となる。辺々引くと

$$b_n = \frac{3^{n+1} + (-2)^{n-1}}{5}$$

が得られる。さらに，これを (3) に代入して，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^{n+2} + (-2)^n}{5} - 2\frac{3^{n+1} + (-2)^{n-1}}{5} = \frac{(3-2)3^{n+1} + (-2-2)(-2)^{n-1}}{5} \\ &= \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1}}{5} \end{aligned}$$

となる。