成城大学　2025 年度　学部別選抜（A方式）
2月5日：数学

[1]　(1) 平均値は,

$$\frac{4\times 2+5\times 1+6\times 1+7\times 1+8\times 2+9\times 2+10\times 1}{10}=7\,(\text{点})$$

となる。また，偏差平方和が $9\times 3+4\times 3+1\times 3+0=42$ となることから，分散は

$$\frac{42}{10}=4.2$$

(2) 平均値は,

$$\frac{3\times 1+4\times 1+5\times 3+6\times 2+7\times 1+9\times 1+10\times 1}{10}=6\,(\text{点})$$

となる。中央値は，小さい方から 5 番目の値 5 と 6 番目の値 6 との平均値となり，5.5（点）。最頻値は，観測値の個数が 3 で最も多い 5（点）。

(3) テスト A の分散は，上記 (1) より 4.2，テスト B の分散も同様に求めると,

$$\frac{16\times 1+9\times 2+4\times 1+1\times 4+0}{10}=4.2$$

となる。

次に，テスト A の得点とテスト B の得点の共分散を求める。テスト A の得点が 7，あるいはテスト B の得点が 6 の観測値に対しては偏差の積が 0 となることに注意すると,

$$\frac{(-3)\times 3+(-3)\times 1+(-2)\times 4+1\times(-1)+1\times(-3)+2\times(-1)+3\times(-1)}{10}=-29$$

と共分散が求まる。相関係数は共分散を 2 つの変数の標準偏差の積で割ったものであるので,

$$r_{AB}=\frac{-2.9}{\sqrt{4.2}\times\sqrt{4.2}}=-\frac{2.9}{4.2}=-0.690$$

よって，答は -0.69 である。

[**2**] (**1**) まず，放物線と直線の交点を求める。

$$(x-1)-(x^2-4x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad -(x-1)(x-4)=0$$

よって，2 つの交点は (1,0) と (4,3) である。放物線と直線で囲まれる図形の面積の公式より，求める図形の面積は,

$$\int_1^4 \{x-1-(x^2-4x+3)\}dx = -\int_1^4 (x-1)(x-4)dx = -\left\{-\frac{1}{6}(4-1)^3\right\} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

(**2**) 曲線 $y=|x^2-4x+3|$ のグラフは,

- $x<1, 3<x$ のとき，$y=x^2-4x+3$ のグラフ
- $1 \leqq x \leqq 3$ のとき，$y=-x^2+4x-3$ のグラフ

となる。それぞれの頂点や交点は，図 2 の通りである。

(1) で求めた領域を E とする。そして,

- A を，放物線 $y=-x^2+4x-3$ と直線 $y=x-1$ で囲まれた範囲
- B を，x 軸と放物線 $y=-x^2+4x-3$ と直線 $y=x-1$ で囲まれた範囲
- C を，x 軸と放物線 $y=x^2-4x+3$ で囲まれた範囲
- D を，放物線 $y=x^2-4x+3$ と放物線 $y=-x^2+4x-3$ と直線 $y=x-1$ で囲まれた範囲

とすると，求めるべき面積は A の面積と D の面積の和である。A の面積は (1) と同じ考え方で，$\frac{1}{6}(2-1)^3=\frac{1}{6}$ と求まる。C の面積も同様に計算して，$\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{8}{6}$ となる。B は，C を x 軸に関して対称にひっくり返した図形の面積から A を差し引いた部分なので，その面積は $\frac{8}{6}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$ である。D は，E から B と C を差し引いた部分なので，その面積は $\frac{27}{6}-\frac{7}{6}-\frac{8}{6}=\frac{12}{6}$ である。よって，答は $\frac{1}{6}+\frac{12}{6}=\frac{13}{6}$ となる。

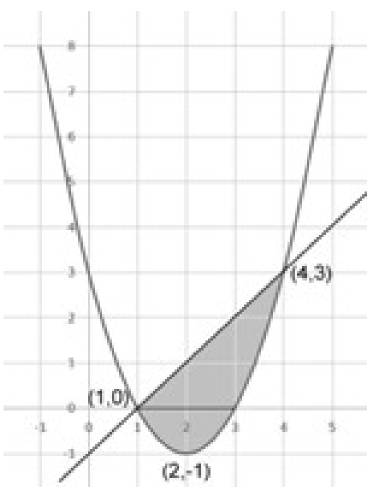

図 1: (1) のグラフ

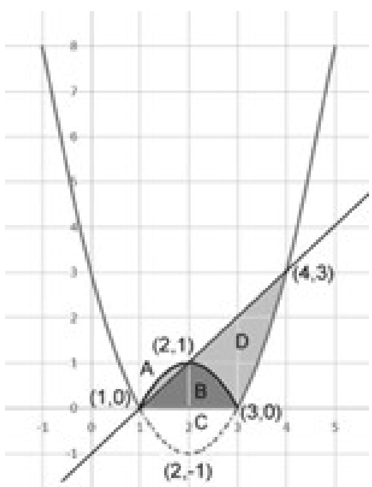

図 2: (2) のグラフ

[**3**] $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおく。

(**1**) 内積は，$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} = 1 \times x + 0 \times y + 0 \times z = x$，$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{p} = 0 \times x + 1 \times y + 0 \times z = y$ であり，大きさは，$|\overrightarrow{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ となる。

(**2**) 三角形 OAP は辺の長さが 1 の正三角形なので，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{p}$ のなす角は 60°，かつ $|\overrightarrow{a}| = 1$，$|\overrightarrow{p}| = 1$ である。これらと (1) を内積の定義に代入すると，

$$x = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{p}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

同様に，$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{p}$ のなす角は 60°，かつ $|\overrightarrow{c}| = 1$，$|\overrightarrow{p}| = 1$ であるから，(1) より

$$y = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{p} = |\overrightarrow{c}||\overrightarrow{p}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

さらに，辺 OP の長さも 1 なので，$|\overrightarrow{p}| = 1$ および $x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{2}$ より，

$$|\overrightarrow{p}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + z^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \frac{1}{2}$$

$z > 0$ であるから，$z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を得る。つまり，$x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{2}$，$z = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(**3**) まず，三角形 OAP の内接円の中心を Q とおき，その座標を求める。正三角形の内心と重心は一致するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{(0,0,0) + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{p}}{3} = \frac{(0,0,0) + (1,0,0) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

したがって，円の内心 Q の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$。

次に，円の半径を求める。点 Q から辺 OA へ下ろした垂線を QH とすると，内接円の性質より QH の長さが円の半径となる。内心は三角形の内角の 2 等分線の交点であるから，$\angle \mathrm{QOH} = 30^\circ$，したがって，三角形 OQH は一つの角が 30° である直角三角形であるから，$\mathrm{QH} : \mathrm{OQ} = 1 : 2$ である。上で求めた Q の座標を用いると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{OQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となるから，$\mathrm{QH} : \mathrm{OQ} = 1 : 2$ より，$\mathrm{QH} = \frac{\sqrt{3}}{6}$。したがって，三角形 OAP の内接円の半径は $\frac{\sqrt{3}}{6}$ である。

【別解】QH を求める際に，H は OA の中点なので，$\mathrm{OH} = \frac{1}{2}$ より，$\mathrm{QH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mathrm{OH} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ とも計算できる。あるいは，正三角形 OAP の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから，内接円の半径を r とおくと，$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ となり，これを r について解けば，$r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ を得る。