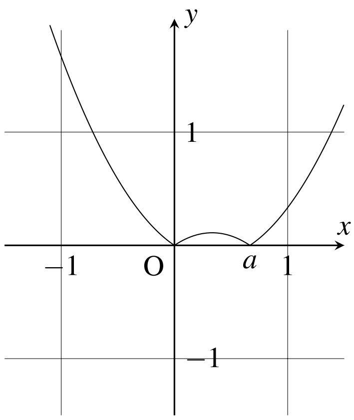
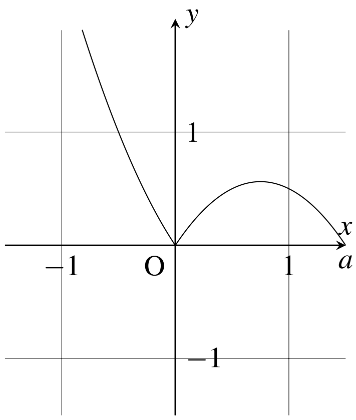
成城大学　2025 年度　学部別選抜 (A方式)
２月６日：数学



$0<a<1$ のとき



$1 \leqq a$ のとき

[**1**]　(i) $0<a<1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left|x^2-ax\right| dx = \int_0^a \left(-x^2+ax\right) dx + \int_a^1 \left(x^2-ax\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_a^1 = -\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3-0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right) \\
&= \frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

S を a で微分すると，$S'=a^2-\dfrac{1}{2}$ となり，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で極値をとる。増減表は

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	

となるので，S は $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値をとり，このとき，$S=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{1}{3}=$
$\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ である。

(ii) $1 \leqq a$ のとき,

$$S=\int_0^1 \left|x^2-ax\right| dx = \int_0^1 \left(-x^2+ax\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}a-\frac{1}{3}$$

S を a で微分すると，$S'=\dfrac{1}{2}>0$ なので，$a=1$ で最小となり，このとき，$S=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=$
$\dfrac{1}{6}$ である。

(i)，(ii) より，S は $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値をとり，このとき，$S=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ である。

[**2**]　(**1**) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2025}$ の常用対数をとると，

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{2025} = -2025\log_{10}2 = -2025\times 0.3010 = -609.525$$

よって，

$$-610 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{2025} < -609$$

となるから，

$$10^{-610} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} < 10^{-609}$$

ゆえに $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2025}$ は小数第 610 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(**2**) $\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2025} = -609.525 = -610+0.475$ と変形し，指数法則 $a^{r+s} = a^r a^s$ を用いると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2025} = 10^{-609.525} = 10^{-610+0.475} = 10^{0.475}\times 10^{-610} \tag{$*$}$$

ここで

$$\log_{10}2 = 0.3010 < 0.475 < \log_{10}3 = 0.4771$$

すなわち

$$\log_{10}2 < \log_{10}10^{0.475} < \log_{10}3$$

よって

$$2 < 10^{0.475} < 3$$

この不等式と $(*)$ を組み合わせれば，

$$2\times 10^{-610} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} < 3\times 10^{-610}$$

が得られる。ゆえに，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2025}$ の小数点以下に初めて現れる 0 でない数字は 2 である。

[**3**] 題意より，点 P は直線 $y = -x + 3$ 上の点である。まず，カードの可能な出方 (m, n) は 30 通りで同様に確からしく，コイン投げの結果も表と裏が同様に確からしいことに注意する。

(1) $(0, 3)$ は線分 AB を 1:2 に外分する点であり，それは (m, n) が (1,2), (2,4), (3,6) でコインが裏の場合に対応するから，$\mathrm{P} = (0, 3)$ となる確率は $\dfrac{3}{60} = \dfrac{1}{20}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ 以下になるということは，P が $(0, 3)$ と $(3, 0)$ を結ぶ線分上（端点を含む）にある場合である。よって，コイン投げの結果が表の場合は，(m, n) が何であっても条件は満たされる。

次に，コイン投げの結果が裏の場合を考える。$1 : 2$ の外分点が $(0, 3)$，$2 : 1$ の外分点が $(3, 0)$ になることから，条件が満たされないのは，外分比 $m : n$ について

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{2}{1}$$

が成り立つ場合であることがわかる。これに対応する (m, n) の組は，(5,6), (4,5), (3,4), (4,6), (2,3), (3,5) (6,5), (6,4), (5,4), (5,3), (4,3), (3,2) の 12 通りである（下図を参照）。したがって，コイン投げの結果が裏のとき，条件を満たす (m, n) の組は $30 - 12 = 18$ 通りであるから，答は $\dfrac{30 + 18}{60} = \dfrac{4}{5}$ となる。