成城大学　2025 年度　学部別選抜（A方式）
２月７日：数学

[**1**]　(**1**) 1 回のじゃんけんで 4 人の手の出し方の総数は $3^4 = 81$ 通り。A だけが勝つとき，A の手の出し方は 3 通り。この手に応じた他の 3 人の負け方は 1 通り。よって求める確率は

$$\frac{3}{34} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

(**2**) A を含む 2 人が勝つときは，敗者の 2 名もそれに応じた同じ手なので 3 通り。他の 3 人の中から勝者になる 1 名を選び出すのも 3 通り。よって求める確率は

$$3 \times \frac{3}{3^4} = \frac{1}{9}$$

(**3**) A を含む 3 人が勝つとき，勝ち方は 3 つの手に応じた 3 通り。3 人の組み合わせは，それぞれ 1 名の異なる敗者が出るときで 3 通り。よって求める確率は

$$3 \times \frac{3}{3^4} = \frac{1}{9}$$

(**4**) 「誰も勝たない」のは「あいこが起きる」ときで、以下の (a), (b) のいずれかの場合である。

(a) 全員が同じ手を出す場合で 3 通り。

(b) 2 人が同じ手で，他の 2 人が残りの 2 つの異なる手の場合。　例えば，2 人が「グー」で残りの 2 人が「チョキ」と「パー」の場合を考える。このとき 4 人から「グー」の 2 名を選ぶ組み合わせは ${}_4C_2 = 6$ で 6 通り。残りの 2 名の手は「チョキ」と「パー」かその逆の 2 通り。全体として $6 \times 2 = 12$ 通りがある。これが 3 種類の手について存在するので，全体として $12 \times 3 = 36$ 通り。

以上の (a) と (b) を併せると，求める確率は

$$\frac{3 + 36}{81} = \frac{13}{27}$$

[**2**] (**1**) 多項式の割り算を行うと，商は $3x+2$，余りは $-19x+5$ となる。

(**2**) 与えられた条件から，

$$2x^3+6x^2-4x+20=P(x)(2x+6)-10x+2$$

となるから，これを整理して，

$$2x^3+6x^2+6x+18=P(x)(2x+6)$$

よって，$2x^3+6x^2+6x+18$ を $2x+6$ で割った商が $P(x)$ であり，

$$P(x)=x^2+3$$

(**3**) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ であるから，両辺に $(x+3)(x-2)$ をかけて整理すると，

$$7x+1=(a+b)x-2a+3b$$

となる。これが x についての恒等式であるから，係数を比較して

$$a+b=7 \quad \text{かつ} \quad -2a+3b=1$$

これを解けば，$a=4, b=3$

【別解】$7x+1=a(x-2)+b(x+3)$ に $x=2, x=-3$ をそれぞれ代入すると，

$$15=5b \quad \text{かつ} \quad -20=-5a$$

となることから，$a=4, b=3$ が得られる。これを元の式に代入すると，確かに x についての恒等式になっている。

[**3**]　(**1**) 点 H は，平面 α 上にあることから，s, t, u を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad s+t+u=1$$

と表すことができる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (s, \sqrt{2}t, \sqrt{3}u)$ と書ける。

また，線分 OH は平面 α と垂直であることから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, \sqrt{2}, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1, 0, \sqrt{3})$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -s + 2t = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -s + 3u = 0$$

これより，$t = \frac{1}{2}s$，$u = \frac{1}{3}s$ であり，さらに $s+t+u=1$ であることから，

$$\frac{11}{6}s = 1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{6}{11}$$

となる。したがって，H の座標は，$\left(\frac{6}{11}, \frac{3\sqrt{2}}{11}, \frac{2\sqrt{3}}{11}\right)$ である。

(**2**) 四面体 OABC は，底面 OAB，高さ OC の三角錐であると考えることができることから，その体積 V は，

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2}\right) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

である。

(**3**) 四面体 OABC は，底面 ABC，高さ OH の三角錐であるとも考えることができる。よって，三角形 ABC の面積を S とおくと，(2) の V について $V = \frac{1}{3}S \times \mathrm{OH}$ が成り立つ。ここで，(1) から

$$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{11}\sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{66}}{11}$$

となることから，

$$S = 3\frac{V}{\mathrm{OH}} = 3 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{11}{\sqrt{66}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

【別解】(1) より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, \sqrt{2}, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1, 0, \sqrt{3})$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1$ が成り立つ。したがって，三角形 ABC の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$